

RESPUESTAS AL SEGUNDO PARCIAL

Segundo Cuatrimestre 2010 – Tema 1

1. Durante un período de tres horas, un automóvil se desplaza a una velocidad dada por $v(t) = (3-t) \cdot e^t$ donde t es el tiempo en horas y $v(t)$ es la velocidad en cientos de kilómetros por hora.
- ¿En qué momento del intervalo de tiempo $[0; 3]$ circula a la velocidad máxima?
¿Cuál es dicha velocidad?
 - Calculá la aceleración del automóvil en el momento $t = 2,5$.

Solución y comentarios

a) Para averiguar en qué momento el automóvil circula a velocidad máxima, buscamos la derivada de la función $v(t) = (3-t) \cdot e^t$.

$$\begin{aligned} v'(t) &= -e^t + (3-t) e^t = e^t (-1 + 3 - t) \\ &= e^t (2 - t) \end{aligned}$$

Buscamos los puntos críticos igualando a cero la derivada.

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow e^t (2 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

El único punto crítico es $t = 2$ que pertenece al intervalo $[0; 3]$ donde está definida la función velocidad.

Vemos que sucede con el signo de la derivada. Como e^t es mayor que cero siempre, sólo analizamos el signo de $2 - t$.

En el intervalo $[0; 3]$ consideramos los intervalos: $[0; 2)$ y $(2; 3]$

- En $[0; 2)$ tomamos $t = 1$ y es $2 - t > 0$
- En $(2; 3]$ tomamos $t = 2,5$ y es $2 - t < 0$

Luego la función derivada pasa de positiva a negativa en $t = 2$, por lo que en $t = 2$ alcanza un máximo y éste es:

$$\text{Max} = (2; e^2)$$

La **velocidad máxima es e^2**

b) La aceleración del automóvil, la encontramos derivando la función de la velocidad. Como esto lo hicimos en el punto anterior tenemos que;

$$a(t) = e^t (2 - t)$$

Y

$$a(2,5) = e^{2,5} (-0,5)$$

$$\mathbf{a(2,5) = -0,5 e^{2,5}}$$

2. Calculá el área de la región limitada por las siguientes curvas $y = x^2 - 4$; $y = x - 2$; y el eje y .

Solución y comentarios

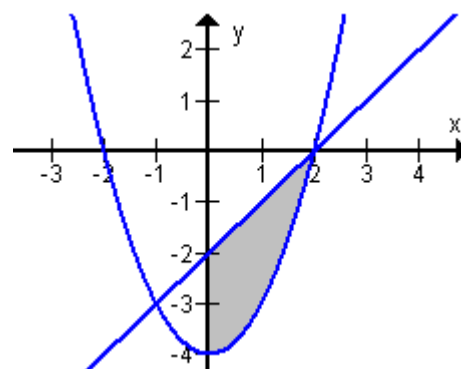
Dibujemos la región para darnos una idea de lo que buscamos.

Debemos buscar la intersección de las dos curvas. Las igualamos:

$$x^2 - 4 = x - 2$$

De donde es

$$x^2 - x - 4 + 2 = 0$$



**Matemática**

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

Como la región está limitada por el eje y , esto equivale a decir que está limitada por la recta $x = 0$

Luego de las soluciones nos interesa la solución $x = 2$.

En el intervalo $[0; 2]$ vemos que la recta $y = x - 2$ queda por encima de $y = x^2 - 4$ ya que por ejemplo, para $x = 1$ es:

$$y(1) = -1$$

y en $x^2 - 4$ reemplazando por $x = 1$ es $1^2 - 4 = -3$

Como $-3 < -1$ la parábola queda en ese intervalo por debajo de la recta.

Entonces el área es:

$$A = \int_0^2 (x - 2) - (x^2 - 4) dx$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (x - 2) - (x^2 - 4) dx \\ &= \int_0^2 (x - x^2 - 2 + 4) dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx \end{aligned}$$

Resolvemos la integral y aplicamos la regla de Barrow:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (-x^2 + x + 2) dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_0^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3}2^3 + \frac{1}{2}2^2 + 2 \cdot 2 \right) - 0 \\ &= -\frac{8}{3} + 2 + 4 \\ &= -\frac{8}{3} + 6 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Luego el área de la región es $A = \frac{10}{3}$

3. ¿En qué puntos la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{4x^2}{x-1}$ tiene pendiente igual a 3?

Solución y comentarios

El dominio de la función f es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Buscamos la derivada de la función f .

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{4x^2}{x-1} &\Leftrightarrow f'(x) = \frac{8x(x-1) - 4x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 8x - 4x^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

El dominio de la derivada es $\text{Dom}(f') = \mathbb{R} - \{1\}$

Matemática

Debe ser $f'(x) = 3$

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 8x}{(x-1)^2} = 3$$

Como es $x \neq 1$ podemos multiplicar miembro a miembro por $(x-1)^2$:

$$4x^2 - 8x = 3(x-1)^2$$

$$4x^2 - 8x = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$4x^2 - 8x = 3x^2 - 6x + 3$$

Igualando a cero:

$$4x^2 - 8x - 3x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$. Como las dos son distintas de 1, es:

$$f'(x) = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ó } x = -1$$

Reemplazamos en la función para hallar los puntos de tangencia.

$$f(3) = \frac{4 \cdot 3^2}{3-1} = \frac{36}{2} = 18$$

$$f(-1) = \frac{4 \cdot (-1)^2}{(-1)-1} = \frac{4}{-2} = -2$$

Por lo que los puntos en los que la recta tangente tiene pendiente igual a 3 son:

$$\mathbf{A = (3; 18) ; B = (-1; -2)}$$

4. Hallá la integral $\int (1 + x^2) \cdot e^{4x} dx$.

Solución y comentarios

Resolvemos utilizando el método de partes.

Hacemos:

$$u = 1+x^2 \quad u' = 2x$$

$$v' = e^{4x} \quad v = \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} \quad (\text{Usamos el método de sustitución para resolver esta integral haciendo } 4x = t)$$

Luego es:

$$\begin{aligned} \int (1+x^2) \cdot e^{4x} dx &= \frac{1}{4} (1+x^2) e^{4x} - \int 2x \cdot \frac{1}{4} e^{4x} dx \\ &= \frac{1}{4} (1+x^2) e^{4x} - \frac{1}{2} \int x \cdot e^{4x} dx \quad (1) \end{aligned}$$

Nuevamente usamos el método de partes para resolver la integral $\int x \cdot e^{4x} dx$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v' = e^{4x} \quad v = \int e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x}$$

Y es:

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{4x} dx &= \frac{1}{4} x e^{4x} - \int \frac{1}{4} e^{4x} dx \\ &= \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \frac{1}{4} e^{4x} + C \\ &= \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + C \end{aligned}$$

**Matemática**

Sustituimos esta última expresión en (1)

$$\int (1 + x^2) \cdot e^{4x} dx = \frac{1}{4} (1 + x^2) e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + C \right)$$

Y operamos:

$$\begin{aligned} \int (1 + x^2) \cdot e^{4x} dx &= \frac{1}{4} (1 + x^2) e^{4x} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + C \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + x^2) e^{4x} - \frac{1}{8} x e^{4x} + \frac{1}{32} e^{4x} + C \\ &= e^{4x} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \right) + C \\ &= e^{4x} \left(\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} x + \frac{9}{32} \right) + C \end{aligned}$$

5. Considerá la función: $h(x) = 2x + \ln(x - 2)$

- Expresá el dominio de la función h .
- Escribí el intervalo del dominio de h en el cual la función es creciente. Usá derivadas para encontrarlo.

Solución y comentarios

- Para hallar el dominio de la función consideramos que el logaritmo natural está definido para los números reales mayores que cero.

Para la función dada debemos considerar

$$\begin{aligned} x - 2 &> 0 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Entonces el dominio de la función es: **Dom(h) = $\mathfrak{R} > 2$** .

- Buscamos la derivada de la función h .

$$h(x) = 2x + \ln(x - 2) \Leftrightarrow h'(x) = 2 + \frac{1}{x - 2}$$

Y el dominio de la derivada es $\text{Dom}(h') = \mathfrak{R} - \{2\}$

Además es $h'(x) = 0$ si

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{x - 2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2(x - 2) + 1}{x - 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x - 4 + 1}{x - 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x - 3}{x - 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $x = 2$ y $x = \frac{3}{2}$.

Por lo que consideramos, en el dominio de la derivada, los intervalos:

$$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; 2\right) \text{ y } (2; +\infty)$$

De estos sólo nos interesa el intervalo $(2; +\infty)$ que es donde está definida la función h .

Estudiamos el signo de la derivada en este intervalo.

Consideremos $x = 3$ en $(2; +\infty)$, es



Matemática

$$h'(3) = 2 + \frac{1}{3-2} = 2 + 1 = 3$$

Por lo que la derivada es positiva en este intervalo y, por lo tanto, la función h es creciente en $(2; +\infty)$. O sea que **h es creciente en todo su dominio.**
