

## RESPUESTAS AL SEGUNDO PARCIAL

### Primer Cuatrimestre 2009 – Tema 1

1. Indicá los intervalos de crecimiento y hallá máximos y mínimos, si existen, para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{-8 + x^2}{x^2 + 1}$$

#### Solución y comentarios

Observamos que el dominio de  $f$  son los números reales.

Para poder contestar buscamos la derivada de la función  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 + 1) - (-8 + x^2)2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x + 16x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{18x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Buscamos el punto crítico igualando a cero la derivada.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{18x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

Y esto es cierto para  $x = 0$ . Luego el único punto crítico es  $x = 0$

Como el denominador es siempre mayor que cero, analizamos solo el signo del numerador:

- Para  $x < 0$  es  $f'(x) < 0$
- Para  $x > 0$  es  $f'(x) > 0$

Luego en  $x = 0$ , la función pasa de negativa a positiva, entonces en  $x = 0$  la función alcanza un mínimo. Y es

$$\text{Min} = (0; -8)$$

Además la función:

- **decrece en  $(-\infty; 0)$**  (ya que la derivada primera es negativa en ese intervalo)
- **crece en  $(0; +\infty)$**  (ya que la derivada es positiva en este intervalo)

2. ¿En que puntos la tangente a la gráfica de  $f(x) = x^3 + 5$  tiene la misma pendiente que la recta  $12x - y = 7$ ?

#### Solución y comentarios

Escribimos la recta  $12x - y = 7$  en la forma  $y = 12x - 7$

Por lo que su pendiente es  $m = 12$ .

Entonces buscamos las abscisas del punto en que la derivada es igual a 12.

Derivemos:

$$f(x) = x^3 + 5 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2$$

**Matemática**

Igualamos la derivada a 12:

$$3x^2 = 12$$

Y buscamos los valores de x que verifican la igualdad:

$$x^2 = 4$$

Tomando raíz cuadrada en ambos miembros es:

$$|x| = 2$$

$$x = 2 \text{ ó } x = -2$$

Luego la recta tangente tiene pendiente 12 cuando es  $x = 2$  ó  $x = -2$ .

Como nos piden los puntos en que esto pasa, reemplazamos en la función  $f(x) = x^3 + 5$

$$f(2) = 2^3 + 5 = 13.$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 5 = -3$$

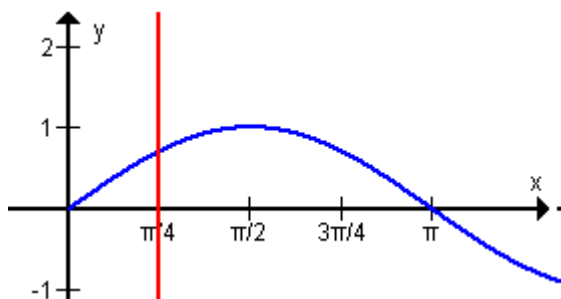
Luego los puntos son:

$$P_1 = (-2; -3) \quad P_2 = (2; 13)$$

3. Determiná  $k$  para que el área de la región limitada por  $y = \text{sen}x$ ;  $y = 0$ ; sea igual a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  en el intervalo  $\left[\frac{\pi}{4}; k\right]$

**Solución y comentarios**

No sabemos nada de  $k$  salvo que es mayor que  $\frac{\pi}{4}$ . Para limitar la región consideramos que  $\frac{\pi}{4} < k < \pi$



Entonces el área de la región es:

$$A = \int_{\pi/4}^k \text{sen}x \, dx$$

Integramos y aplicamos la regla de Barrow:

$$A = \int_{\pi/4}^k \text{sen}x \, dx = -\cos x \Big|_{\pi/4}^k = -\cos k + \cos \frac{\pi}{4} = -\cos k + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como el área debe ser igual a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , hacemos:

$$-\cos k + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego es

$$-\cos k = 0 \rightarrow k = \frac{\pi}{2}$$



4. Resolvé la integral usando el método adecuado:  $\int 2x^3 \ln x \, dx$

**Solución y comentarios**

Nos conviene usar el método de partes. Para ello hacemos:

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = 2x^3 \quad v = 2 \int x^3 dx = 2 \cdot \frac{1}{4} x^4 = \frac{1}{2} x^4$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int 2x^3 \ln x \, dx &= \frac{1}{2} x^4 \ln x - \int \frac{1}{x} \frac{1}{2} x^4 \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^4 \ln x - \frac{1}{2} \int x^3 \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^4 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 + C \\ &= \frac{1}{2} x^4 \ln x - \frac{1}{8} x^4 + C \end{aligned}$$